

Lifting Scheme 及其在小波图象编码中的应用

曾剑芬 马争鸣

(中山大学电子系信息处理实验室, 广州 510275)

摘要 Lifting Scheme 是构造第二代小波的关键技术. 相对于第一代小波而言, Lifting Scheme 是一种比 Mallat 算法更快、更简单和更容易操作的算法, 也是 JPEG2000 推荐的算法. 为了将其应用到小波图象编码中, 提出了一种对 Lifting Scheme 作适当改进以用于小波图象编码的方法. 该方法就是先用 Lifting Scheme 来实现 D9/7 双正交小波变换, 然后再用这种技术实现的 D9/7 双正交小波变换来进行图象压缩编码. 在将 Lifting Scheme 算法用于小波图象编码的过程中, 对该算法做了必要的简化, 以便保证每个提升 (lifting) 环节都是 FIR 滤波. 同时, 根据能量守恒的原则, 重新调整了尺度因子. 实验结果表明, 这种经过改进的 Lifting Scheme 取得了比 Mallat 算法更好的图象编码效果.

关键词 小波图象编码 Mallat 算法 Lifting Scheme

中图分类号: TN919.81 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2001)11-1111-07

Lifting Scheme and Its Application to Wavelet Image Coding

ZENG Jian-fen, MA Zheng-ming

(Lab. of Information Processing, Dept. of Electronics, Zhongshan Univ., Guangzhou 510275)

Abstract Lifting scheme is honored as the key tool to the construction of second generation wavelets. As for the first generation wavelets, lifting scheme is a new way of implementation faster, simpler and easier than the commonly-used Mallat algorithm. Lifting scheme is also the one recommended by JPEG2000, a new image coding international standard scheduled to be formally published this year. In order to apply the lifting scheme to wavelet image coding, we make some improvement to the lifting scheme. We first implement the D9/7 bi-orthogonal wavelet transform through lifting scheme and then apply the transform to wavelet image coding. In doing so, we improve the procedure of implementation to make sure that each lifting step is FIR filtering. At the same time, we adjust the value of scale factor under the guide of energy conservation. The scale factor obtained this way is different from that recommended by JPEG2000. The experimental results presented in this paper show that our improved lifting scheme has achieved the image coding gain better than that achieved by Mallat algorithm.

Keywords Wavelet image coding, Mallat algorithm, Lifting scheme

0 引言

Sweldens 提出的 Lifting Scheme^[1] 被誉为构造第二代小波的关键技术, 因为从理论上来说, Lifting Scheme 大大拓展了小波分析的研究领域, 而从应用上来看, Lifting Scheme 也使得构造小波不再是数

学家的专利, 工程师们也可以根据自己的实际情况来构造不同的小波 (用 Sweldens 的话来说: You can build your own wavelets at home!^[2]), 而且对于第一代小波而言, Lifting Scheme 则是一种比 Mallat 算法更快、更简便和更易操作的另类小波变换方法. 现已证明, 所有第一代小波 (包括多小波) 都可以通过 Lifting Scheme 的方法来实现变换^[3-6]. Lifting Scheme 的研究和应用现已渐成气候, 它不但吸引了

诸如 Daubechies 这样对第一代小波发展有重要贡献的著名学者参与^[3,7],而且已经被新的图象编码国际标准 JPEG2000 草案稿所推荐^[8].据悉,定于2003年发射的欧洲宇航局(European Space Agency)的宇宙飞船 Rosetta 也是利用 Lifting Scheme 来构造它的图象压缩编码系统^[9].

1 Lifting Scheme

$x[n]$ 信号的 Lifting Scheme 正、反变换的过程如图1所示.从图1可见,Lifting Scheme 主要由分割(Split)、预测(Prediction)和更新(Update)3部分组成.

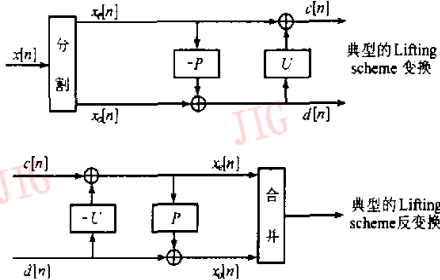


图1 Lifting Scheme 变换和反变换

(1) 分割 分割的目的是将信号 $x[n]$ 分割成如下相互关联的两个部分,即 $x_e[n]$ 和 $x_o[n]$,且 $x_e[n]$ 和 $x_o[n]$ 的相关性越强,分割的效果愈好.分割通常采用惰性(lazy)的分割方法,即

$$x_e[n] = x[2n], x_o[n] = x[2n+1]$$

对于 Lifting Scheme 来说,这种惰性的分割方法看似平常,却奇绝.由于它充分地利用了信号 $x[n]$ 的局域相关性,因而为随后的预测和更新过程提供了数据基础.

(2) 预测 所谓预测,就是用 $x_e[n]$ 来预测 $x_o[n]$,预测误差为

$$d[n] = x_o[n] - P(x_e[n])$$

其中, $P(\cdot)$ 表示预测算子.这种预测过程是一个可逆的过程,即只要选定一种预测算子 $P(\cdot)$,就可以由 $x_e[n]$ 和 $d[n]$ 来恢复 $x_o[n]$,进而恢复信号 $x[n]$

$$x_o[n] = d[n] + P(x_e[n])$$

在 Lifting Scheme 中,预测有如下两个作用:

① 可以用紧凑形式来表示原数据 一般来说,由于信号 $x[n]$ 都是具有局域相关性的,因此,预测

误差 $d[n]$ 的数值总是要比 $x_o[n]$ 小得多,也就是说,用 $x_e[n]$ 和 $d[n]$ 来表示信号 $x[n]$,当然要比用 $x_e[n]$ 和 $x_o[n]$ 来表示信号 $x[n]$ 紧凑得多.

② 可以在空间域里分离出信号 $x[n]$ 的高频分量 在预测时,由于总是用过 $x[2n]$ 和 $x[2n+1]$ 两点的一条平滑曲线(即低次插值多项式)来预测它们的中间点 $x[2n+1]$,这里平滑意味着低频,而预测误差 $d[n]$ 则意味着信号 $x[n]$ 在一个局部区域与自己低频分量的误差,因此预测误差 $d[n]$ 可以看成是信号 $x[n]$ 的高频分量.为什么在 Lifting Scheme 中,预测误差常称为信号的小波系数,其原因就在于此.

显然, $d[n]$ 可以看成是信号 $x[n]$ 的高频分量,但 $x_e[n]$ 却不能看成是信号 $x[n]$ 的低频分量,因为它只是信号 $x[n]$ 的亚抽样(sub-samples).

(3) 更新 更新的目的是要用 $d[n]$ 来“修理” $x_e[n]$,以使得修理后的 $x_e[n]$ (记为 $c[n]$) 只包含信号 $x[n]$ 的低频成分,即

$$c[n] = x_e[n] + U(d[n])$$

这里, $U(\cdot)$ 表示更新算子,但要在空间域完成这个过程,直观来看,就是要使 $c[n]$ 的包络线成为信号 $x[n]$ 的一条平滑拟合曲线.这从数学上来说,就是要使 $c[n]$ 与 $x[n]$ 具有相同的低阶消失矩,例如,人们可以要求 $c[n]$ 与 $x[n]$ 具有相同的零阶消失矩(即相同的直流分量),这时更新算子 $U(\cdot)$ 为

$$U(d[n]) = \frac{d[n-1] + d[n]}{4}$$

注意:不论是预测还是更新,都可称为是 Lifting Scheme 的一个提升(Lifting)环节.

值得注意的是,信号经 Lifting Scheme 分解的效果与信号经 Cohen-Daubechies-Feauveau 双正交小波变换^[10]分解的效果是一样的.

2 Lifting Scheme 与第一代小波的关系

从理论上来说,Lifting Scheme 的重大意义在于构造第二代小波(正如 Daubechies 所说:The original motivation for developing lifting was to build second generation wavelets, i. e., wavelets adapted to situations that do not allow translation and dilation like non-Euclidean spaces.^[3]).对于第一代小波来说,Lifting Scheme 则是一种另类实现小波变换的方法,因为它比长期沿用的 Mallat 算法^[11]更快、更简便和更易操作,因而受到 JPEG2000

草案稿的青睐. Daubechies 曾经给出利用 Lifting Scheme 来实现第一代小波变换的算法^[3]. 本文即根据该算法来具体实现 D9/7 双正交小波变换^[12].

Daubechies 的算法是以 Mallat 算法为基础的, 因此这里先简介一下 Mallat 算法. 图 2 是双正交小波变换 Mallat 算法的示意图.

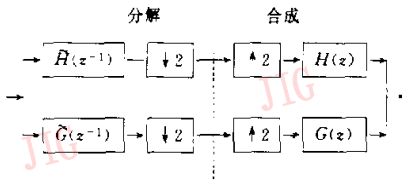


图 2 双正交小波变换的 Mallat 算法

其中

$$\tilde{G}(z) = z^{-1}H(-z^{-1}), \tilde{H}(z) = -z^{-1}G(-z^{-1})$$

为了保证信号经小波变换和反变换后能够复原, 一般要求

$$H(z)\tilde{H}(z^{-1}) + G(z)\tilde{G}(z^{-1}) = 2$$

$$H(z)\tilde{H}(z^{-1}) + G(z)\tilde{G}(-z^{-1}) = 0$$

为了改用 Lifting Scheme, 必须考虑图 2 中各个系统函数的奇部和偶部, 如

$$\begin{aligned} H_e(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(2n)z^{-n} \\ &= \frac{1}{2}(H(z^{1/2}) + H(-z^{1/2})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_o(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(2n+1)z^{-n} \\ &= z^{1/2} \frac{1}{2}(H(z^{1/2}) - H(-z^{1/2})) \end{aligned}$$

↑

$$H(z) = H_e(z^2) + z^{-1}H_o(z^2)$$

而且 $\tilde{H}(z)$ 、 $G(z)$ 和 $\tilde{G}(z)$ 的奇部和偶部同此定义.

利用这些奇部和偶部函数, 就可以定义

$$\tilde{P}(z) = \begin{bmatrix} -\tilde{H}_e(z) & \tilde{G}_e(z) \\ -\tilde{H}_o(z) & \tilde{G}_o(z) \end{bmatrix}, P(z) = \begin{bmatrix} H_e(z) & G_e(z) \\ H_o(z) & G_o(z) \end{bmatrix}$$

于是, 图 2 所示的 Mallat 算法就可以转化为如图 3 所示的等价算法.

这时信号复原的条件即变为

$$P(z)\tilde{P}^T(z^{-1}) = I(\text{单位矩阵})$$

用 Lifting Scheme 来构造小波变换的关键在于 $\tilde{P}^T(z^{-1})$ 的因式分解, 因为其中每个因式均对应着一个提升环节. 根据 Daubechies 的算法, $\tilde{P}^T(z^{-1})$ 的因

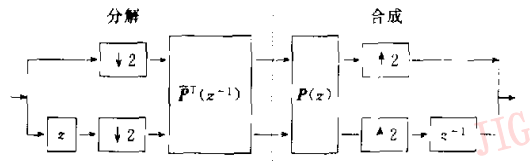


图 3 小波变换的等价算法

式分解分两步来完成, 即先进行 $\begin{bmatrix} \tilde{H}_e(z) \\ \tilde{H}_o(z) \end{bmatrix}$ 的因式分解, 然后再进行 $\tilde{P}^T(z^{-1}) = \begin{bmatrix} \tilde{H}_e(z^{-1}) & \tilde{H}_o(z^{-1}) \\ \tilde{G}_e(z^{-1}) & \tilde{G}_o(z^{-1}) \end{bmatrix}$ 的因式分解.

对于 D9/7 双正交小波变换来说, 则有

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_e(z) \\ \tilde{H}_o(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{h}_4 z^{-2} + \tilde{h}_2 z^{-1} + \tilde{h}_0 + \tilde{h}_2 z + \tilde{h}_4 z^2 \\ \tilde{h}_3 z^{-1} + \tilde{h}_1 + \tilde{h}_1 z + \tilde{h}_3 z^2 \end{bmatrix}$$

其中, $\tilde{h}_0 = 0.8527$, $\tilde{h}_1 = 0.3774$, $\tilde{h}_2 = -0.1106$, $\tilde{h}_3 = -0.0238$, $\tilde{h}_4 = 0.0378$.

再利用求两个多项式最大公因式的欧几里德算

法, 即可将 $\begin{bmatrix} \tilde{H}_e(z) \\ \tilde{H}_o(z) \end{bmatrix}$ 进行如下分解

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_e(z) \\ \tilde{H}_o(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha(z^{-1}+1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta(1+z) & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & \gamma(z^{-1}+1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \delta(1+z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \\ -0 \end{bmatrix}$$

其中, $\alpha = 1.5861$, $\beta = -0.0530$, $\gamma = 0.8829$, $\delta = 0.4435$, $\rho = 1.1496$.

为了对 $\tilde{P}^T(z^{-1}) = \begin{bmatrix} -\tilde{H}_e(z^{-1}) & \tilde{H}_o(z^{-1}) \\ \tilde{G}_e(z^{-1}) & \tilde{G}_o(z^{-1}) \end{bmatrix}$ 进行因

式分解, 需先利用下面的矩阵方程来定义两个过渡函数 $\tilde{G}_e(z)$ 和 $\tilde{G}_o(z)$

$$\begin{bmatrix} \tilde{G}_e(z) \\ \tilde{G}_o(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha(z^{-1}+1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta(1+z) & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & \gamma(z^{-1}+1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \delta(1+z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\rho} \end{bmatrix}$$

然后再利用下面的方程来定义函数 $S(z)$

$$\tilde{P}(z) = \begin{bmatrix} \tilde{H}_e(z) & \tilde{G}_e(z) \\ \tilde{H}_o(z) & \tilde{G}_o(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{H}_e(z) & \tilde{G}_e(z) \\ -\tilde{H}_o(z) & -\tilde{G}_o(z) \end{bmatrix}^{-1} S(z) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

于是即得到 $\tilde{P}^T(z^{-1})$ 的如下因式分解

$$\begin{aligned} \tilde{P}^T(z^{-1}) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S(z^{-1}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{H}_e(z^{-1}) & \tilde{H}_o(z^{-1}) \\ \tilde{G}_e(z^{-1}) & \tilde{G}_o(z^{-1}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S(z^{-1}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \delta(1+z^{-1}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma(z+1) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(1+z^{-1}) & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a(z+1) & 1 \end{bmatrix} \\
 & = \frac{\rho}{\rho^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho^2 S(z^{-1}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \delta(1-z^{-1}) & 1 \end{bmatrix} \times \\
 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma(z+1) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(1+z^{-1}) & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a(z+1) & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$\tilde{P}^{-1}(z^{-1})$ 的因式分解表明,图3所示的小波正变换可以通过若干个提升环节来完成(见图4)。

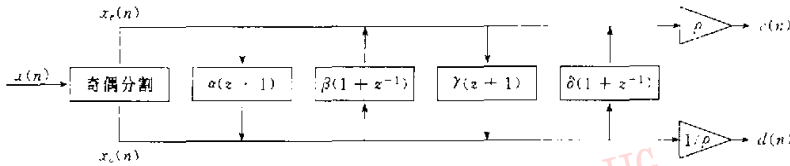


图4 用 Lifting Scheme 实现的 D9/7 双正交小波变换

3 基于 Lifting Scheme 的小波图象编码

在把用 Lifting Scheme 实现的 D9/7 双正交小波变换应用于小波图象编码时,本文做了如下两点重要的改进:

- (1) 删除了最后一个提升过程 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho^2 S(z^{-1}) & 1 \end{bmatrix}$ 。

虽然在理论上,这意味着在没有考虑 $H(z)$ 的影响的情况下,就改变了“双正交”的性质,但是,在实践中,这样做却可以避免计算多项式除法 $S(z) = \frac{\tilde{G}(z) - G(z)}{H(z)} = \frac{z^{-1}H(-z^{-1}) - G(z)}{H(z)}$ (这样计算出来的多项式未必是有限阶数),现已发现,这也正是 JPEG2000 草案稿的做法,只不过它没有明白声明:这样做移花接木,已经不是原来的 D9/7 双正交小波变换了。

(2) 由于本文在用 Lifting Scheme 来实现 D9/7 双正交小波变换时,做了上述的改动,因此,尺度因子 ρ 需要重新调整。另外,本文根据能量守恒的原则,重新计算了尺度因子 $\rho = 0.869354787$,而 JPEG2000 草案稿也重新调整了尺度因子 $\rho = 1.230174105$ 。根据 JPEG2000 专家组 Marcellin 教授给我们的电子邮件介绍, JPEG2000 草案稿是根据整数小波变换来调整尺度因子 (We chose this value to make the gains compatible with the 5/3

利用信号的复原条件 ($P(z)\tilde{P}^{-1}(z^{-1}) = I$),可以得到 $P(z)$ 的因式分解,进而可得到用 Lifting Scheme 实现的小波反变换

$$\begin{aligned}
 P(z) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a(z+1) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \beta(1+z^{-1}) & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma(z+1) & 1 \end{bmatrix} \times \\
 & \begin{bmatrix} 1 & -\delta(1+z^{-1}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\rho^2 S(z^{-1}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

integer filter)的。实验结果表明,采用本文的数值,可以取得更好的图象编码效果(图5~图9)。由于篇幅所限, JPEG2000 与 Lifting Scheme 的问题将另文讨论。

表1、表2、表3给出了本文实验结果的各项数据。从这些数据可以看出,用 Lifting Scheme 得到的数据与用 Mallat 算法得到的数据是不同的,这是因为本文是采用改进后的 Lifting Scheme,其实现的小波变换已不是原来的 D9/7 双正交小波变换了。从这些数据还可以看出, Lifting Scheme 取得了比 Mallat 算法更好的图象编码效果。

表1中, M 代表单位能量均值, σ^2 代表单位能量方差, H 代表熵值, $R(0,1)$ 代表水平相关系数, $R(1,0)$ 代表垂直相关系数。

在表2中,所谓图象(或子带图象)的能量是指其像素灰度(或系数)的平方和,量化后零系数的比例愈高,图象编码的压缩比也会愈高。



图5 Lena 原图(512×512,8bpp)



(a) Mallat Algorithm($Cr=64, PSNR=28.97dB$)

(b) Lifting Scheme($Cr=64.24, PSNR=29.51dB$)

图 6 两种算法压缩后重建的 Lena 图象



(a) Mallat Algorithm($Cr=32.08, PSNR=31.09dB$)

(b) Lifting Scheme($Cr=31.96, PSNR=31.65dB$)

图 7 两种算法压缩后重建的 Lena 图象



(a) Mallat Algorithm($Cr=16.00, PSNR=32.74dB$)

(b) Lifting Scheme($Cr=15.99, PSNR=33.66dB$)

图 8 两种算法压缩后重建的 Lena 图象



(a) Mallat Algorithm($Cr=8.08, PSNR=33.85dB$)

(b) Lifting Scheme($Cr=8.00, PSNR=35.17dB$)

图 9 两种算法压缩后重建的 Lena 图象

表1 D9/7小波图象变换两种不同实现方法的统计特性

		M	σ^2	H	$R(0,1)$	$R(1,0)$
原图(见图5)		99.454 712	2 776.164 551	4.593 288	0.932 761	0.968 984
Mallat Algorithm	LL	198.983 658	10 597.814 453	13.999 146	0.881 840	0.915 676
	LH	0.012 684	52.294 357	13.998 978	-0.127 836	0.374 514
	HL	-0.378 933	224.620 331	13.996 391	0.134 390	0.510 608
	HH	-0.042 429	35.603 340	13.936 739	-0.122 295	-0.213 859
Lifting Scheme	LL	199.205 948	10 617.294 922	13.996 048	0.881 639	0.945 629
	LH	0.012 460	52.959 171	13.999 100	-0.121 517	-0.360 386
	HL	0.396 119	234.916 290	13.995 193	0.168 706	0.531 455
	HH	-0.045 518	35.683 048	13.995 122	-0.124 483	-0.205 827

表2 D9/7小波图象变换两种不同实现方法的能量特性和量化后零系数的比例

		图象能量	占当前层能量的百分比(%)	零系数比例(%)
原图(见图5)		829 436 736	100	0
Mallat Algorithm	LL	822 356 736	99.380 929	0
	LH	856 796.875	0.103 543	24.694 824
	HL	3 682 530	0.445 030	18.713 379
	HH	583 353.062 5	0.070 498	24.737 549
Lifting Scheme	LL	824 121 792	99.360 544	0
	LH	867 689.437 5	0.104 673	24.493 408
	HL	3 851 442.500	0.464 353	18.658 447
	HH	584 665.312 5	0.070 490	24.780 273

表3 D9/7小波图象编码两种不同实现方法的编码结果

	预定压缩倍数	实际压缩倍数	峰值信噪比 PSNR(dB)	例图
34	Mallat Algorithm	64.393 0	28.974 7	图6
	Lifting Scheme	64.235 3	29.508 9	
32	Mallat Algorithm	32.078 3	31.092 3	图7
	Lifting Scheme	31.961 0	31.646 7	
16	Mallat Algorithm	16.002 9	32.744	图8
	Lifting Scheme	15.992 2	33.655 6	
8	Mallat Algorithm	8.083 5	33.854 1	图9
	Lifting Scheme	7.999 8	35.174 3	

4 结论

(1) 仅就信号的小波变换而言,Lifting Scheme的运用有如下两种不同的层次:

① 第1种层次的运用如图1所示,信号 $x[n]$ 经过分割、预测和更新,产生一个低频信号 $c[n]$ 和高频信号 $d[n]$ 。由于此时人们可以根据自己的需要来

设计预测算子 $P(\cdot)$ 和更新算子 $U(\cdot)$,因此主动权掌握在使用者的手中。虽然,某个具体的设计可能会使Lifting Scheme等同于某个第一代小波变换,但是,就其本质而言,Lifting Scheme这一层次的运用属于第二代小波变换的范畴。

② 第2种层次的运用就是用Lifting Scheme来实现某个第一代小波变换。在这里,Lifting Scheme仅仅是一个工具而已。由此可见,信号小波变换后的性态只取决于所使用的小波,而与Lifting Scheme本身无关。JPEG2000也就是在这个意义上推荐使用Lifting Scheme。恋旧的人们完全可以用不用Lifting Scheme,继续使用Mallat的算法来实现第一代小波变换。

(2) Daubechies曾经给出一个用一系列提升环节来实现第一代小波变换的算法,根据这个算法,其最后一个提升环节未必是FIR滤波,这有悖“提升”的原意,因此,本文省掉了这个环节,而将其造成的影响通过调节尺度因子来补偿。实验结果表明,本文的方法取得了比Mallat算法更好的图象编码效果(图5~图9)。

参 考 文 献

- 1 Wim Sweldens. The lifting scheme: A construction of second generation wavelets[J]. *SIAM J. Math. Anal.*, 1997, 29(2): 511~546.
- 2 Wim Sweldens, Peter Schroder. Building your own wavelets at home[A]. *Wavelets in Computer Graphics*, ACM SIGGRAPH Course Notes[R/OL], 1996, <http://cm.bell-labs.com/who/wim>
- 3 Ingrid Daubechies, Wim Sweldens. Factoring wavelet transforms into lifting steps[J]. *J. Fourier Anal. Appl.*, 1998, 4(3): 247~269.
- 4 Davis Geoffrey M, Vasily Strela, Radka Turcajova. Multiwavelet construction via the lifting scheme[A]. In: *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics [R/OL]*, Marcel Dekker, 1999. <http://www.geoffdavis.net/>
- 5 Wim Sweldens. The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets[J]. *Journal of Appl. and Comput. Harmonic Analysis*, 1996, 3(2): 186~200.
- 6 Wim Sweldens. The lifting scheme: A new philosophy in biorthogonal wavelet construction[A]. In: *Proc. SPIE, Wavelet Applications in Signal and Image Processing III (C)*, 1995, 2569: 68~79.
- 7 Calderbank A R, Ingrid Daubechies, Wim Sweldens *et al.* Wavelet transforms that map integers to integers[J]. *Journal of Appl. and Comput. Harmonic Analysis*, 1998, 5(3): 332~369.
- 8 FCD15444-1. JPEG2000 [S/OL]. <http://www.jpeg.org/FCD15444-1.htm>
- 9 Homepage of European Space Agency[OL]. <http://sci.esa.int/content/doc/e7/2279.htm>
- 10 Cohen A, Daubechies I, Feauveau J. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets[J]. *Comm. Pure&Appl. Math.*, 1992, 45(3): 485~560.
- 11 Mallat S A. Theory for multiresolution signal decompositions: The wavelet representation[J]. *IEEE Trans on PAMI*, 1989, 11(7): 674~693.
- 12 Antonini M, Barlaud M, Mathieu P *et al.* Image coding using the wavelet transform[J]. *IEEE Trans. on Image Processing*, 1992, 1(2): 205~220.



曾剑芬 1977年生, 中山大学通信与信息系统专业硕士研究生, 研究方向为多媒体数据处理与传输。



马争鸣 1957年生, 1989年获清华大学模式识别与智能控制专业博士学位, 现为中山大学电子系副教授, 主要学术兴趣为小波分析、分形几何、人工神经网络。